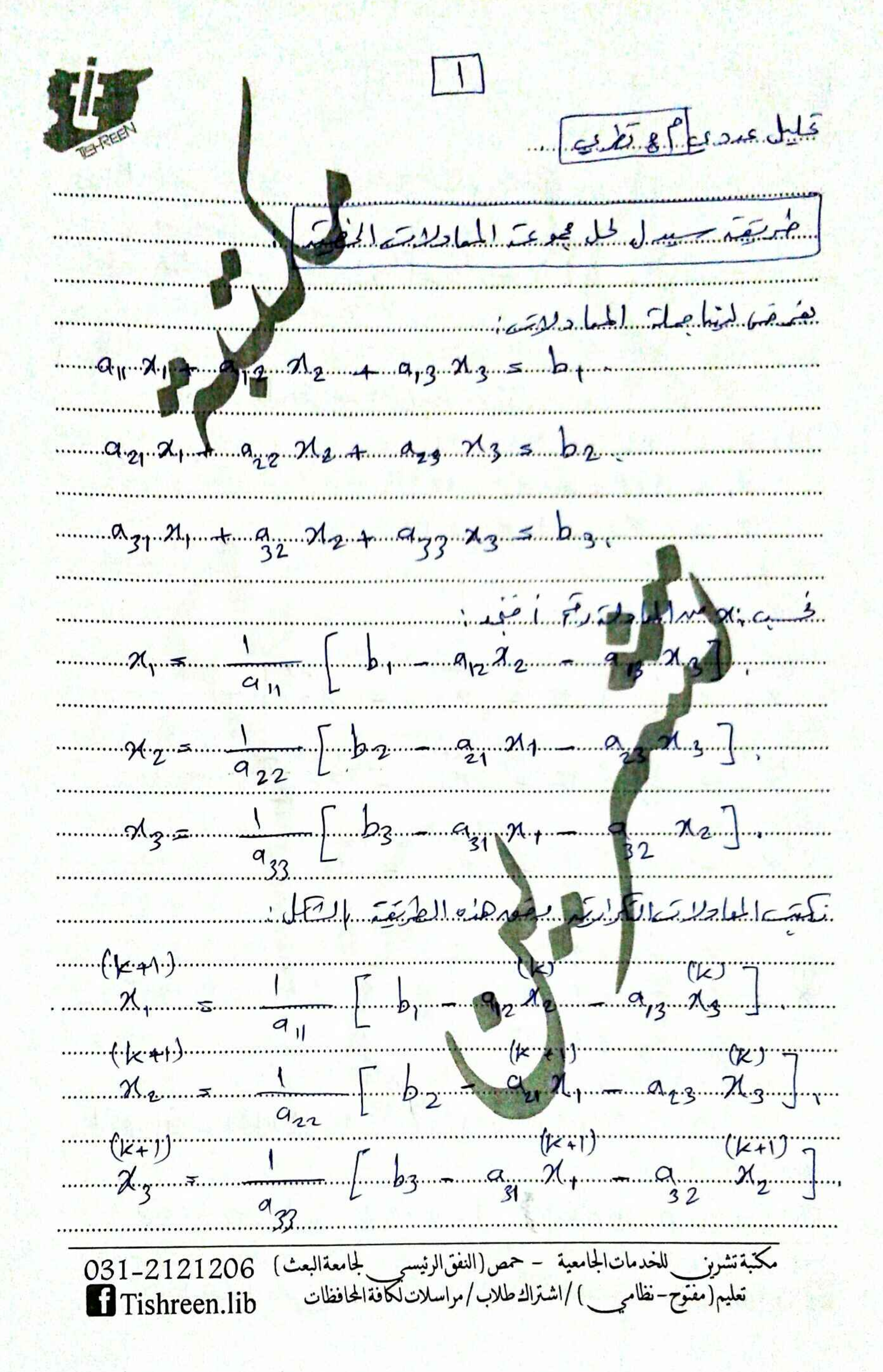




تحليل عددي | م1 & تطبيقي

## طريقة سيدل لحل مجموعة المعادلات الخطية

نفرض لدينا جملة المعادلات:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

نحسب $x_i$ من المعادلة رقم i فنجد:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[ b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 \right]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[ b_2 - a_{21} x_1 - a_{23} x_3 \right]$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left[ b_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2 \right]$$

نكتب المعادلات التكرارية وفق هذه الطريقة بالشكل:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[ b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[ b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} \right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left[ b_3 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} \right]$$

نجد الحل التقريبي يتقارب من الحل الحقيقي بشكل أسرع بثلاث مرات من الطريقة السابقة.

أيضاً هنا تتقارب الحل إذا كانت $A$ قطرية (1)

**مثال:**

أوجد حل التمرين السابق بطريقة سيدل:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[12 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right]$$

$$X^{(1)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} = 1.2 \\ x_2^{(1)} = 1.08 \\ x_3^{(1)} = 0.972 \end{Bmatrix}$$

لنوجد الآن الحل الثاني اعتماداً على الحل الأول:

$$X^{(2)} = (0.9948 ,\ 1.0032 ,\ 1.00158)$$

تحليل عددي (م 8 نظري)

$$\overset{(3)}{X} = (0.9996492\ ,\ 1.0000162\ ,\ 1.0000345)$$

$$X = \beta + \alpha X$$

يحسب الخطأ المرتكب بطريقة التقريبات المتتالية وفقاً للحدود التالية:

أولاً: إذا كان الحل الابتدائي هو:

$$\overset{(0)}{X} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$$

فإن:

$$R = \| X - \overset{(k)}{X} \| \le \frac{\|\alpha\|^{(k)}}{1 - \|\alpha\|} \| \overset{(1)}{X} - \overset{(0)}{X} \| \quad (*)$$

أما إذا كان الحل الابتدائي:

$$\overset{(0)}{X} = \beta \quad \text{فإن:}$$

$$R = \| X - \overset{(k)}{X} \| \le \frac{\|\alpha\|^{(k+1)}}{1 - \|\alpha\|} \| \beta \| \quad (**)$$

مثال:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

والمطلوب:

أولاً: دراسة تقارب الحل بطريقة التقريبات المتتالية.

ثانياً: أوجد حل المعادلات السابقة بطريقتي جاكوبي - سيدل مستخدماً:

$$\varepsilon = 0.02 \quad , \quad \overset{(0)}{X} = \beta$$

ثالثاً: أوجد قيمة الخطأ المرتكب بعد (2) تقريبات متتالية للحل.

رابعاً: أوجد عدد مرات التكرار الكافي لإيجاد الحل بخطأ مرتكب $\frac{1}{1000}$

**الحل:**

$$x_1 = \frac{1}{8}\left[26 - x_2 - x_3\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\left[7 - x_1 + x_3\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{5}\left[7 - x_1 + x_2\right],$$

ونكتبه بالشكل:

$$X = \beta + \alpha X,$$

$$\beta = \left(\frac{26}{8}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)^T \rightarrow$$ مقبول

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

**ملاحظة:**

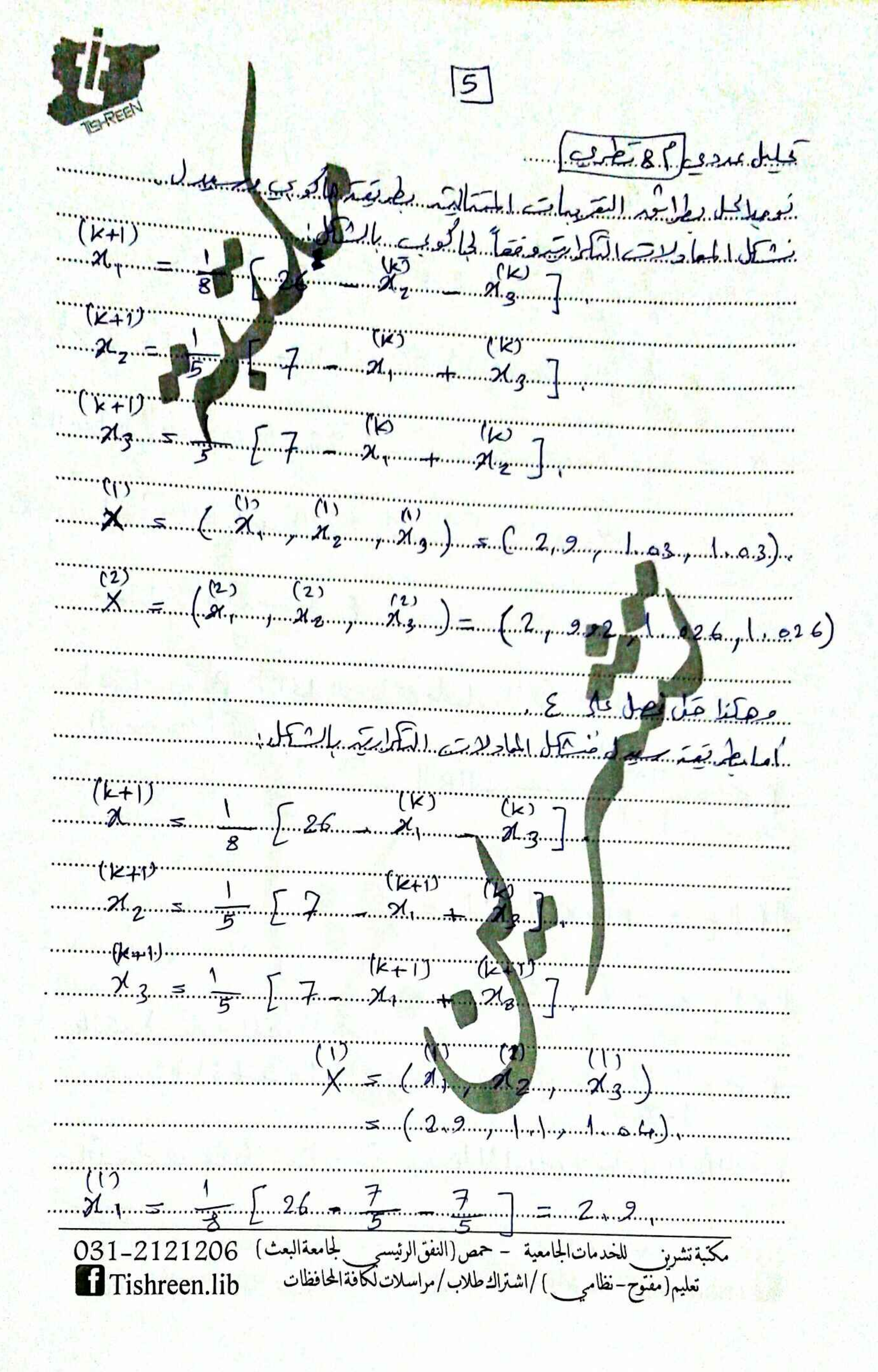
أثناء حساب الخطأ المرتكب نطبق العلاقتين (*) ، (**)

ولكن نستخدم نفس النظيم لحساب $\alpha$ ، $\beta$

$$\|\alpha\|_I = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| , \quad 1 \le i \le n$$

$$= \max(0.25, 0.4, 0.4) = 0.4 < 1,$$

باعتبار أن $\|\alpha\|_I < 1$ فالحل متقارب بطرائق التقريبات المتتالية.






تحليل عددي م2 8 نظري

نوجد الحل بطريقة التقريبات المتتالية بطريقة جاكوبي و سيدل

نشكل المعادلات التكرارية وفقاً لجاكوبي بالشكل:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left[26 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right],$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[7 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right],$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[7 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right],$$

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right) = (2.9, 1.03, 1.03).$$

$$X^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right) = (2.922, 1.026, 1.026)$$

وهكذا حتى نصل الى $\varepsilon$ .

أما بطريقة سيدل فنشكل المعادلات التكرارية بالشكل:

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left[26 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

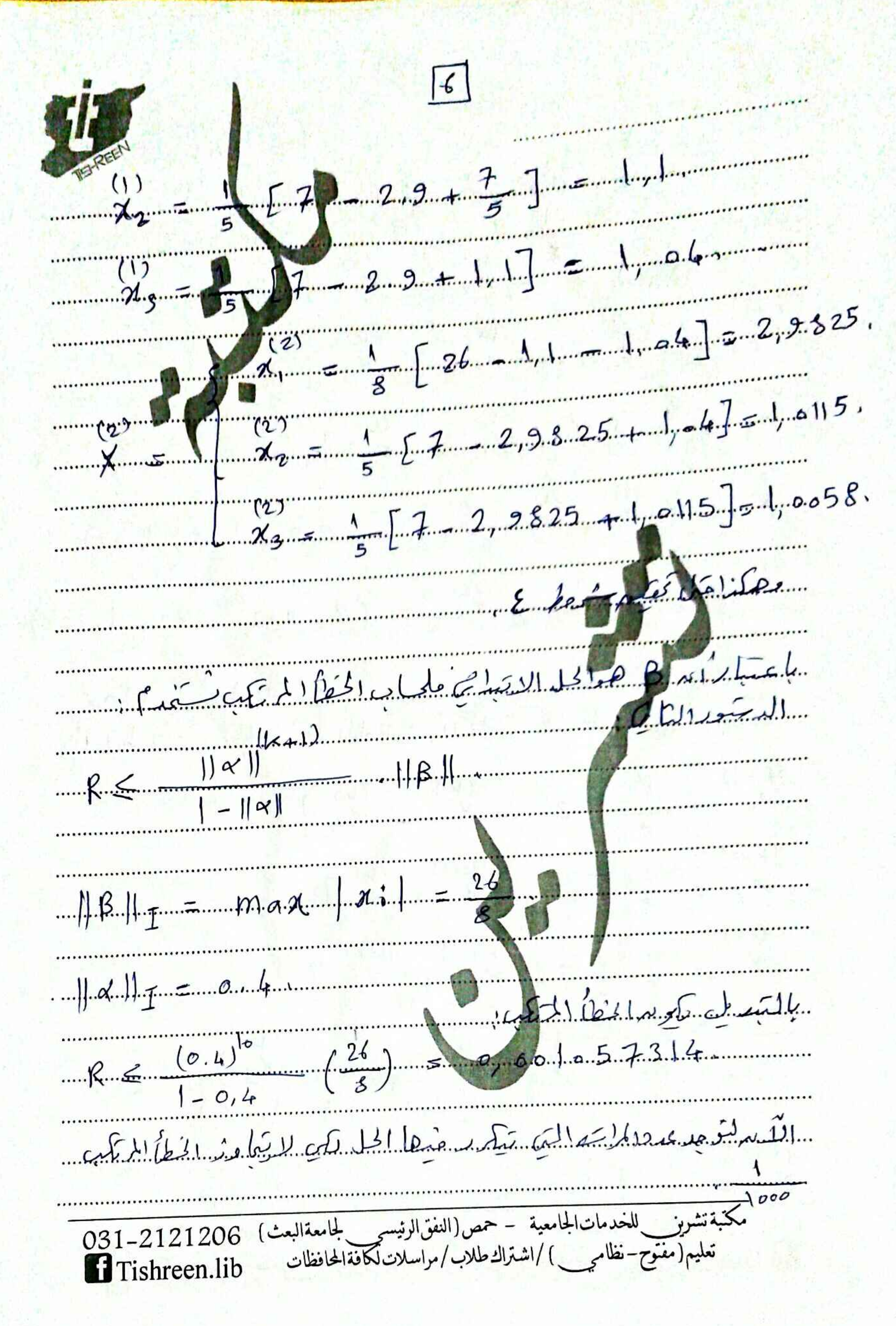
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[7 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right],$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[7 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}\right],$$

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right)$$

$$= (2.9, 1.1, 1.04),$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8}\left[26 - \frac{7}{5} - \frac{7}{5}\right] = 2.9,$$





$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}\left[7 - 2.9 + \frac{7}{5}\right] = 1,1$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left[7 - 2.9 + 1,1\right] = 1,04$$

$$X^{(2)} = \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{8}\left[26 - 1,1 - 1,04\right] = 2,9825. \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{5}\left[7 - 2,9825 + 1,04\right] = 1,0115. \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}\left[7 - 2,9825 + 1,0115\right] = 1,0058. \end{cases}$$

وهكذا حتى تحقق شرط $\varepsilon$.

باعتبار أن $B$ هو الحل الابتدائي فلحساب الخطأ المرتكب نستخدم الدستور التالي:

$$R \leq \frac{\|\alpha\|^{(k+1)}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|B\|$$

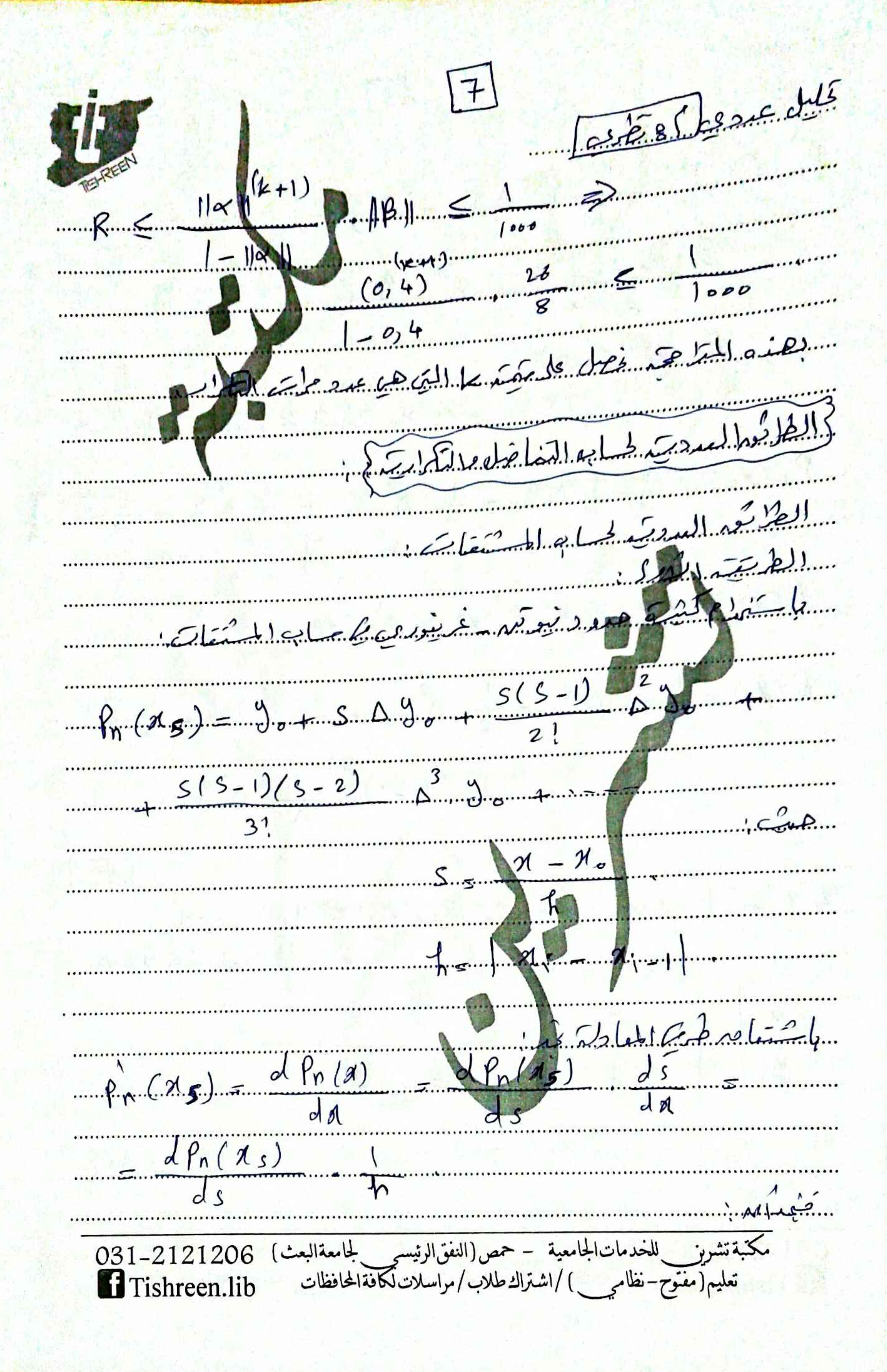
$$\|B\|_I = \max |x_i| = \frac{26}{8}$$

$$\|\alpha\|_I = 0,4$$

بالتبديل يكون الخطأ المرتكب:

$$R \leq \frac{(0.4)^{10}}{1 - 0,4}\left(\frac{26}{8}\right) = 0,00105731 4$$

الآن لنوجد عدد المراحل التي تتكرر فيها الحل لكي لا يتجاوز الخطأ المرتكب $\frac{1}{1000}$







تحليل عددي م 8 نظري

$$R \leq \frac{\|\alpha\|^{(k+1)}}{1-\|\alpha\|} \cdot \|B\| \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$\frac{(0,4)^{(k+1)}}{1-0,4} \cdot \frac{28}{8} \leq \frac{1}{1000}$$

بهذه المراجحة نحصل على قيمة k التي هي عدد مرات التكرار

## الطرائق العددية لحساب التفاضل والتكامل :

الطرائق العددية لحساب المشتقات :

الطريقة الأولى :

باستخدام كثيرة حدود نيوتن - غريغوري في حساب المشتقات :

$$P_n(x_s) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

حيث :

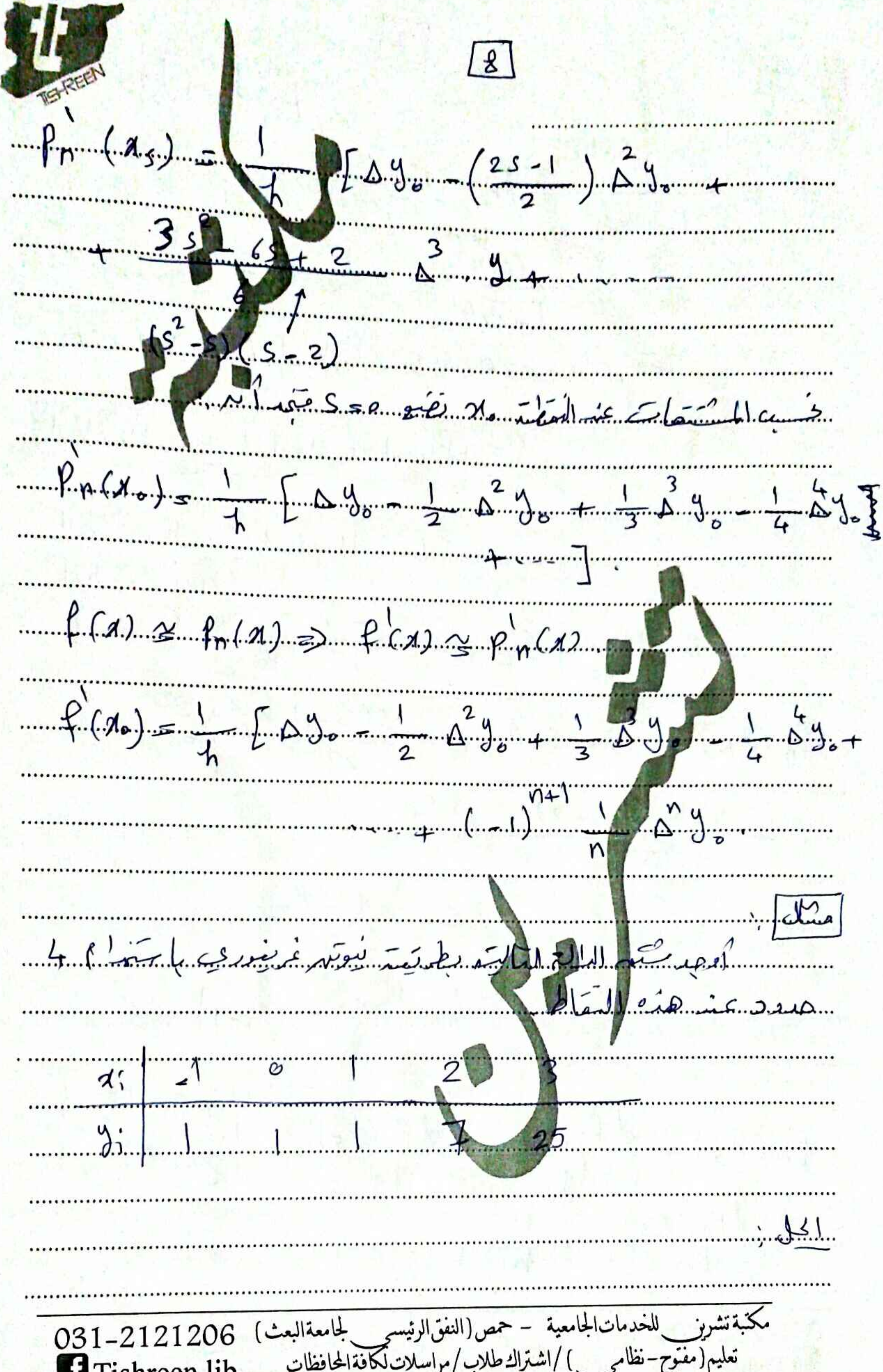
$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$h = |x_i - x_{i-1}|$$

باشتقاق طرفي المعادلة نجد :

$$P'_n(x_s) = \frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_n(x_s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{dP_n(x_s)}{ds} \cdot \frac{1}{h}$$

ومنه :





$$P_n'(x_s) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \left(\frac{2s-1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{3s^2 - 6s + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \dots\right]$$

$$(s^2 - s)(s-2)$$

نحسب المشتقات عند النقطة $x_0$ نعوض $s=0$ فنجد أن

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots\right]$$

$$f(x) \simeq P_n(x) \Rightarrow f'(x) \simeq P_n'(x)$$

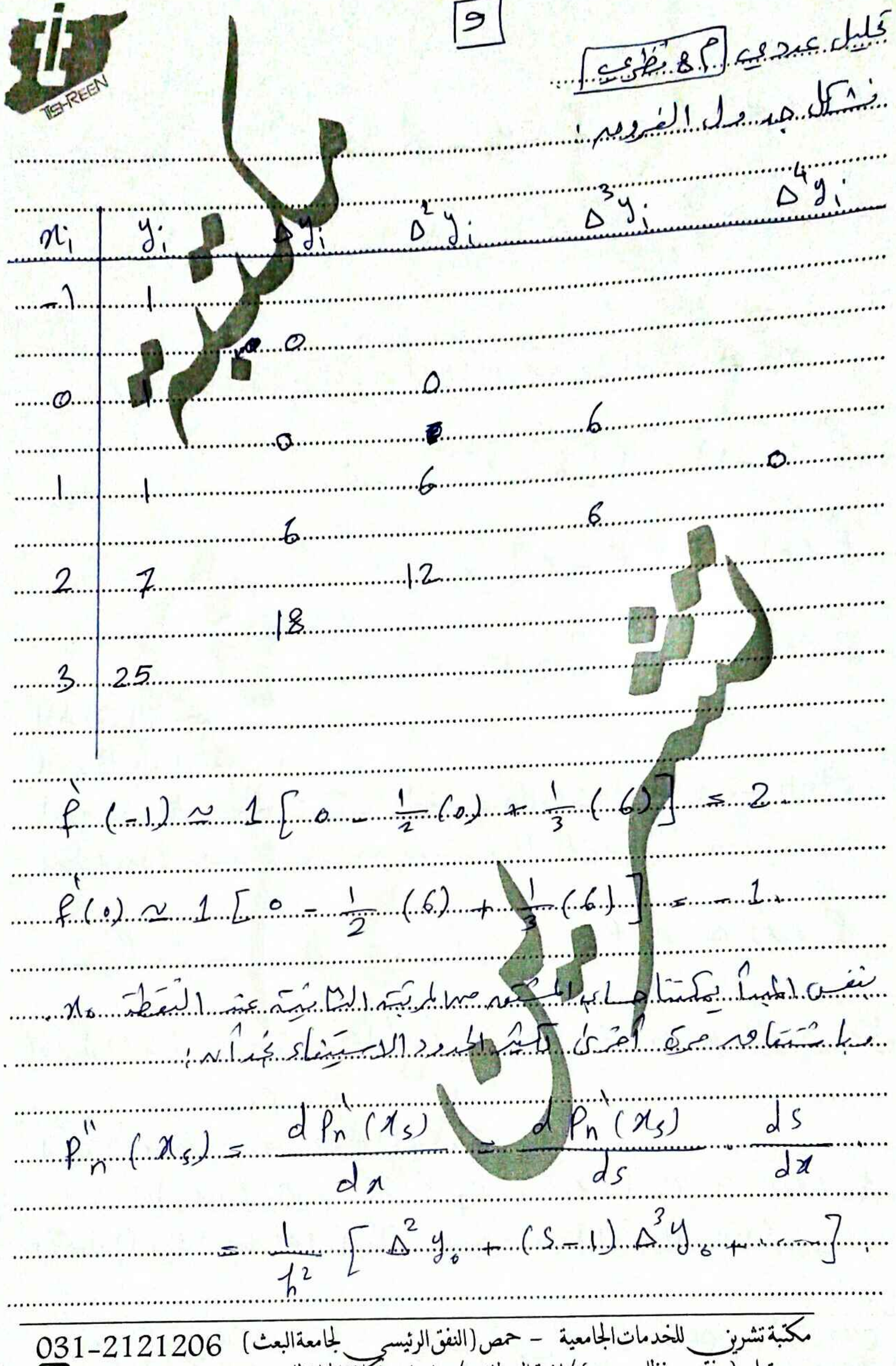
$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\Delta^n y_0\right]$$

**مثال:**

أوجد مشتق الدالة التالية بطريقة نيوتن غريغوري باستخدام 4 حدود عند هذه النقاط

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 25 |

الحل:



تحليل عددي [م8 نظري]

نشكل جدول الفروق:

| $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | | | | |
| | | 0 | | | |
| 0 | 1 | | 0 | | |
| | | 0 | | 6 | |
| 1 | 1 | | 6 | | 0 |
| | | 6 | | 6 | |
| 2 | 7 | | 12 | | |
| | | 18 | | | |
| 3 | 25 | | | | |

$$f'(-1) \simeq 1\left[0 - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{3}(6)\right] = 2$$

$$f'(0) \simeq 1\left[0 - \frac{1}{2}(6) + \frac{1}{3}(6)\right] = -1$$

بنفس المبدأ يمكننا حساب المشتق من المرتبة الثانية عند النقطة $x_0$ مباشرةً من أجل كثير الحدود الاستيفائي نجد أن:

$$P''_n(x_s) = \frac{d P'_n(x_s)}{dx} = \frac{d P'_n(x_s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (s-1)\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

$$P''_n(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right],$$

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right],$$

**مثال:**

أوجد المشتق الثاني في المثال السابق عند النقطة $x = 1$ ,

$$f''(-1) = 1\,[0 - 6] = -6,$$

$$f''(0) = 1\,[6 - 6] = 0,$$

$$f''(1) = 1\,[12] = 12,$$

الطريقة الثانية:

الكمال غير المعينة:

إن عبارة المشتق التي يمكننا التعبير عنها على شكل مجموع قيم الدالة نقط محددة مضروبة بثوابت غير معينة من المناسب يمكننا أن نكتب:

$$f'(x) \cong C_0 f_0 + C_1 f_1 + \cdots + C_n f_n.$$

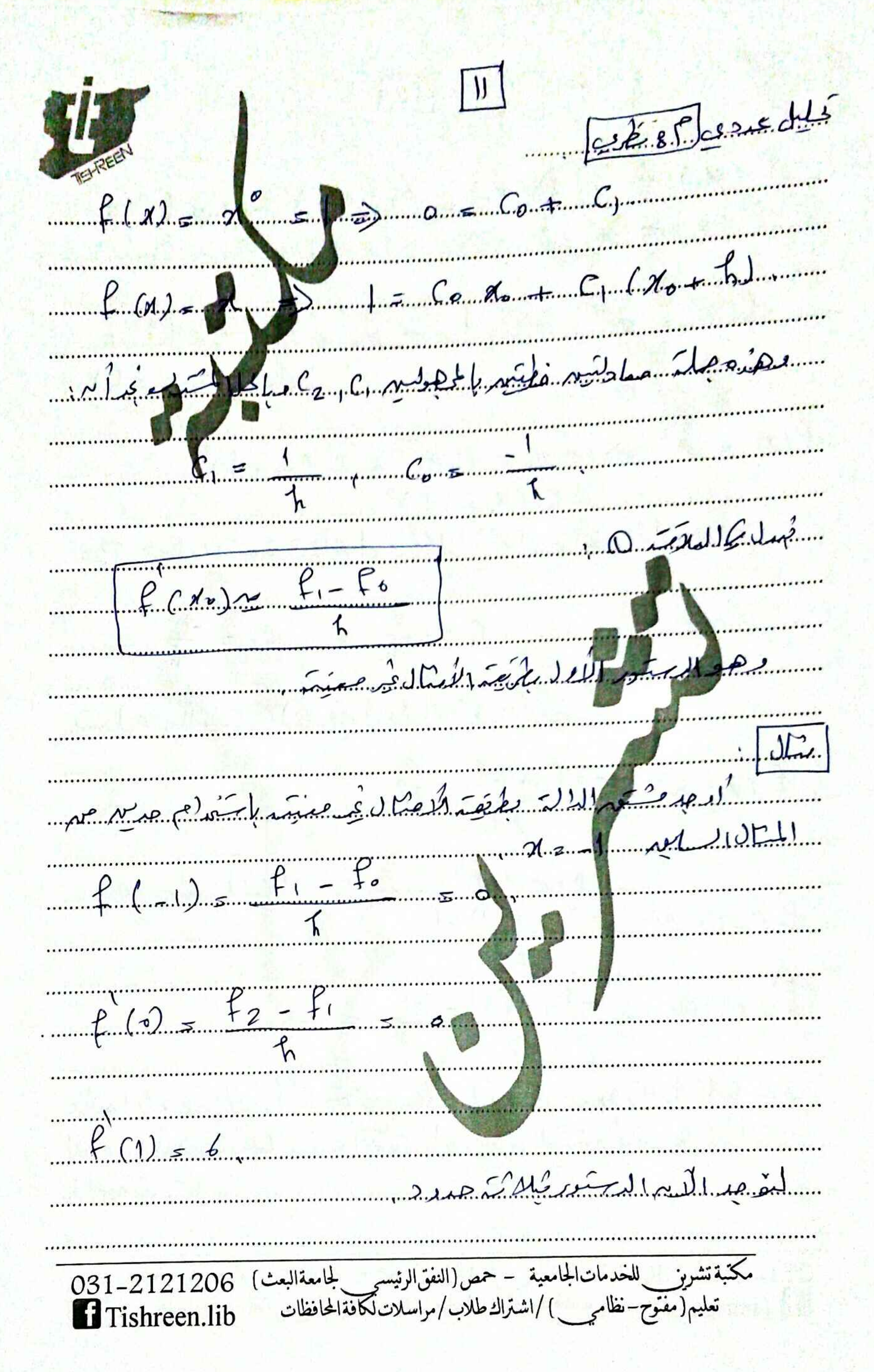
تتحول إلى مساواة حقيقية من أجل أي كثيرة حدود تتجاوز $n$ بتحويل الثوابت $C_0, C_1, \ldots$

لنأخذ الآن حداً من هذه العلاقة:

$$f'(x_0) \cong C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$$

وتتحول إلى مساواة من أجل أي كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز الأولى:

تحليل عددي م٢ ٨ نظري



$f(x) = x^0 = 1 \Rightarrow 0 = C_0 + C_1$

$f(x) = x \Rightarrow 1 = C_0 x_0 + C_1 (x_0 + h)$

وهذه جملة معادلتين خطيتين بالمجهولين $C_2, C_1$ وبحل الجملة نجد أن:

$$C_1 = \frac{1}{h} , \quad C_0 = \frac{-1}{h}$$

نعوض في العلاقة (1):

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

وهو الدستور الأول بطريقة الأمثال غير المعينة.

**مثال:**

أوجد مشتق الدالة بطريقة الأمثال غير المعينة باستخدام جدول قيم المثال السابق عند $x = -1$.

$$f'(-1) = \frac{f_1 - f_0}{h} = 0$$

$$f'(0) = \frac{f_2 - f_1}{h} = 0$$

$f'(1) = 6$.

لنوجد الآن الدستور ثلاثي الحدود.

(2) $f'(x_0) \simeq c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$

$f(x) = x^0 \Rightarrow 0 = c_0 + c_1 + c_2$

$f(x) = x \Rightarrow 1 = c_0 x_0 + c_1 (x_0 + h) + c_2 (\underbrace{x_0 + 2h}_{x_2})$

$f(x) = x^2 \Rightarrow 2x_0 = c_0 x_0^2 + c_1 (x_0 + h)^2 + c_2 (x_0 + 2h)^2$

حلة 3 معادلات بـ 3 مجاهيل وبالحل المشترك لهذه الجملة نجد أن:

$$c_0 = \frac{-3}{2h} , \quad c_1 = \frac{2}{h} , \quad c_2 = \frac{-1}{2h}$$

بتبديل هذه القيم في ② نحصل على الدستور الآتي:

$$f'(x_0) \simeq \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

وهو دستور المفاضلات غير المنتهية بثلاث حدود:

$$f'(-1) \simeq \frac{-3 + 4(1) - 1}{2} = 0$$

$$f'(0) \simeq \frac{-3 + 4(1) - 7}{2} = -3$$

يمكن إيجاد صيغ أكثر دقة باستخدام 4 أو 5 حدود وكلما كان عدد الحدود المأخوذة كلما كانت القيمة التقريبية للمشتق أقرب من القيمة الحقيقية.

يمكن إيجاد صيغ مشابهة للصيغ السابقة بإيجاد قيم معاملات أمثال المشتقة من المرتبة الأولى 1 , 1 والمرتبة الثانية 1 , 2 , 1 من الثالثة 1 , 3 , 3 , 1 فنجد بعد تعميم صيغة المشتقات من المراتب العليا بالشكل التالي :

$$f''(x_0) \simeq \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

$$f'''(x_0) \simeq \frac{f_3 - 3f_2 + 3h - f_0}{h^2}$$

$$f''''(x_0) \simeq \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4}$$

$$f^{(n)}(x_0) \simeq \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f_{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

**الطريقة التقريبية لحساب التكاملات :**

من المعلوم أن تكامل التابع $y = f(x)$ على المجال $[a, b]$ هو عبارة عن مساحة الشكل المحصور بين المنحني هذه الدالة والمحور $xx$ وكلاً من المستقيم $x = a$ , $x = b$ وكتقريب يمكن اعتبار هذه المساحة مساحة المستطيل الذي طولا ضلعاه $f(a)$ , $b - a$ إذاً :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\cdot f(a)$$

$$\simeq (b-a)\, f(b)$$

نجزئ الآن المجال $[a,b]$ إلى $n$ من المجالات المتساوية والتي طول كل منها $h$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

وبالتالي يكون مساحة السطح المحصور بين تكامل الدالة يساوي مجموع المستطيلات الناتجة عن التقسيم.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right]$$

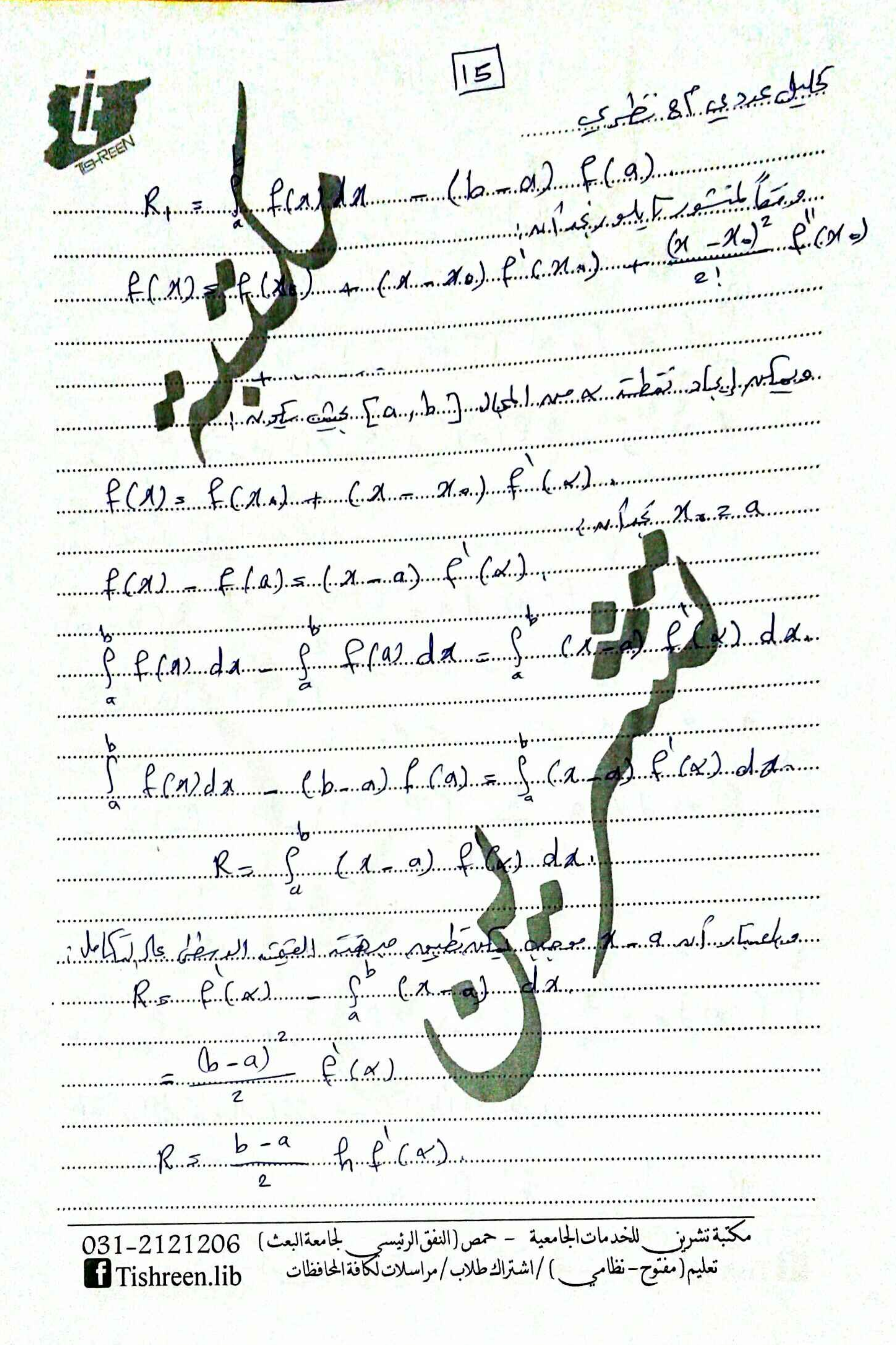
$$f(x_i) = f_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}\right]$$

$$I \simeq h\left[f(x_1) + \dots + f(x_n)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[f_1 + \dots + f_n\right]$$

نلاحظ أن تكامل الدالة هي قيمة الدالة عند نقاط محددة معروفة يحقق شروط معينة ويمكننا حساب الخطأ المرتكب بإيجاد الفرق ما بين القيمة التقريبية والحقيقية للتكامل فيما بعد.





تحليل عددي 2018 نظري

$$R_1 = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\,f(a)$$

ووفقاً لمنشور تايلور نجد أن:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0)$$

ويمكن إيجاد نقطة $\alpha$ من المجال $[a, b]$ بحيث يكون:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,f'(\alpha)$$

$x_0 = a$ نجد أن:

$$f(x) - f(a) = (x - a)\,f'(\alpha)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(a)\,dx = \int_a^b (x-a)\,f'(\alpha)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\,f(a) = \int_a^b (x-a)\,f'(\alpha)\,dx$$

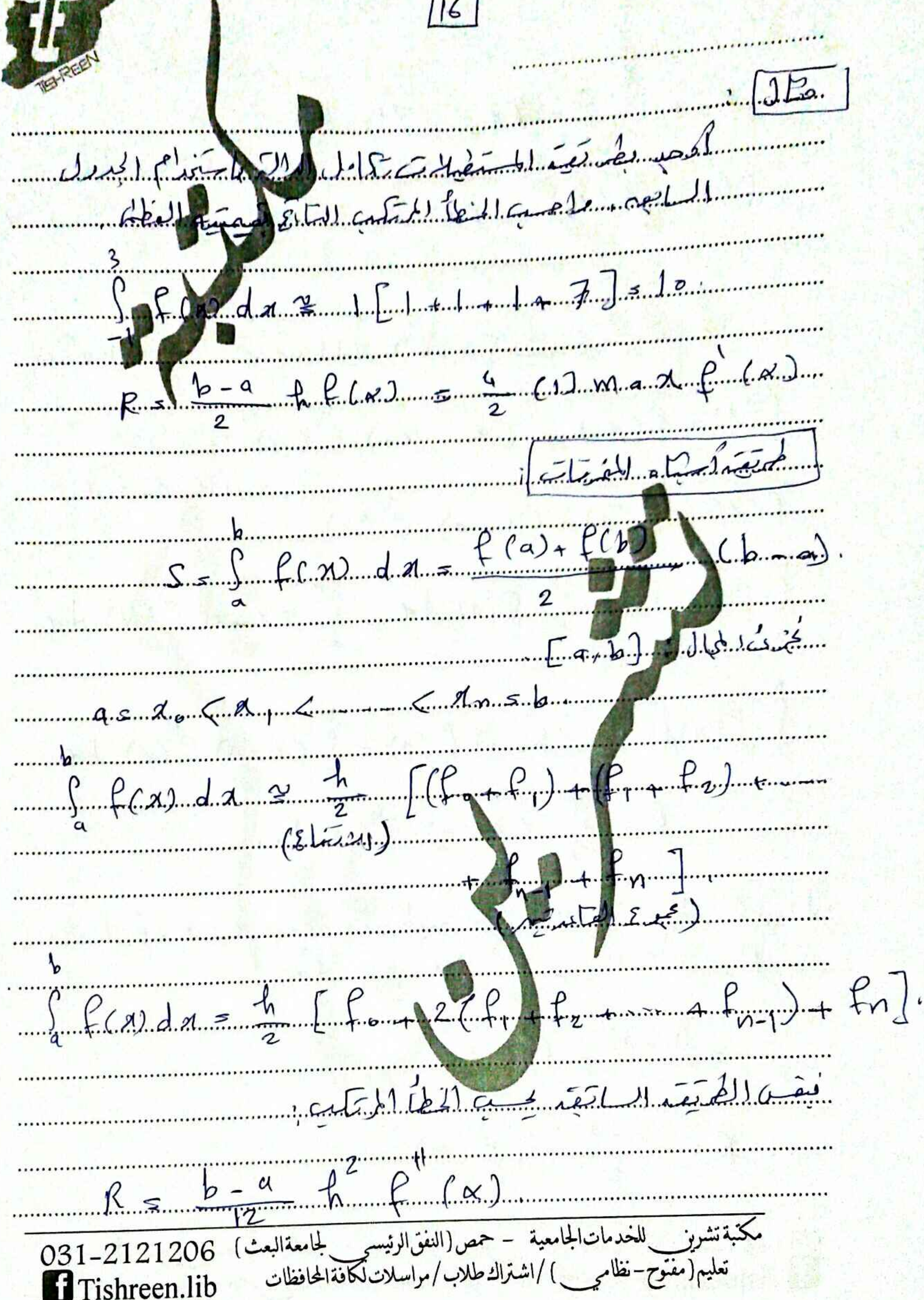
$$R = \int_a^b (x-a)\,f'(\alpha)\,dx$$

وباعتبار أن $x - a$ موجب يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التكامل:

$$R = f'(\alpha) \int_a^b (x-a)\,dx$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} f'(\alpha)$$

$$R = \frac{b-a}{2}\, h\, f'(\alpha)$$





**ملاحظة:**

الحصول بنفس تقنية المستطيلات تكامل الدالة باستخدام الجدول السابق، ملاحظة الخطأ المرتكب الناتج بطريقة المعطاة

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx \simeq 1[1+1+1+7] = 10$$

$$R = \frac{b-a}{2} h f'(\alpha) = \frac{4}{2}(1) \max f'(\alpha)$$

**طريقة أشباه المنحرفات:**

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

نجزئ المجال $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[(f_0+f_1)+(f_1+f_2)+\dots+f_{n-1}+f_n\right]$$

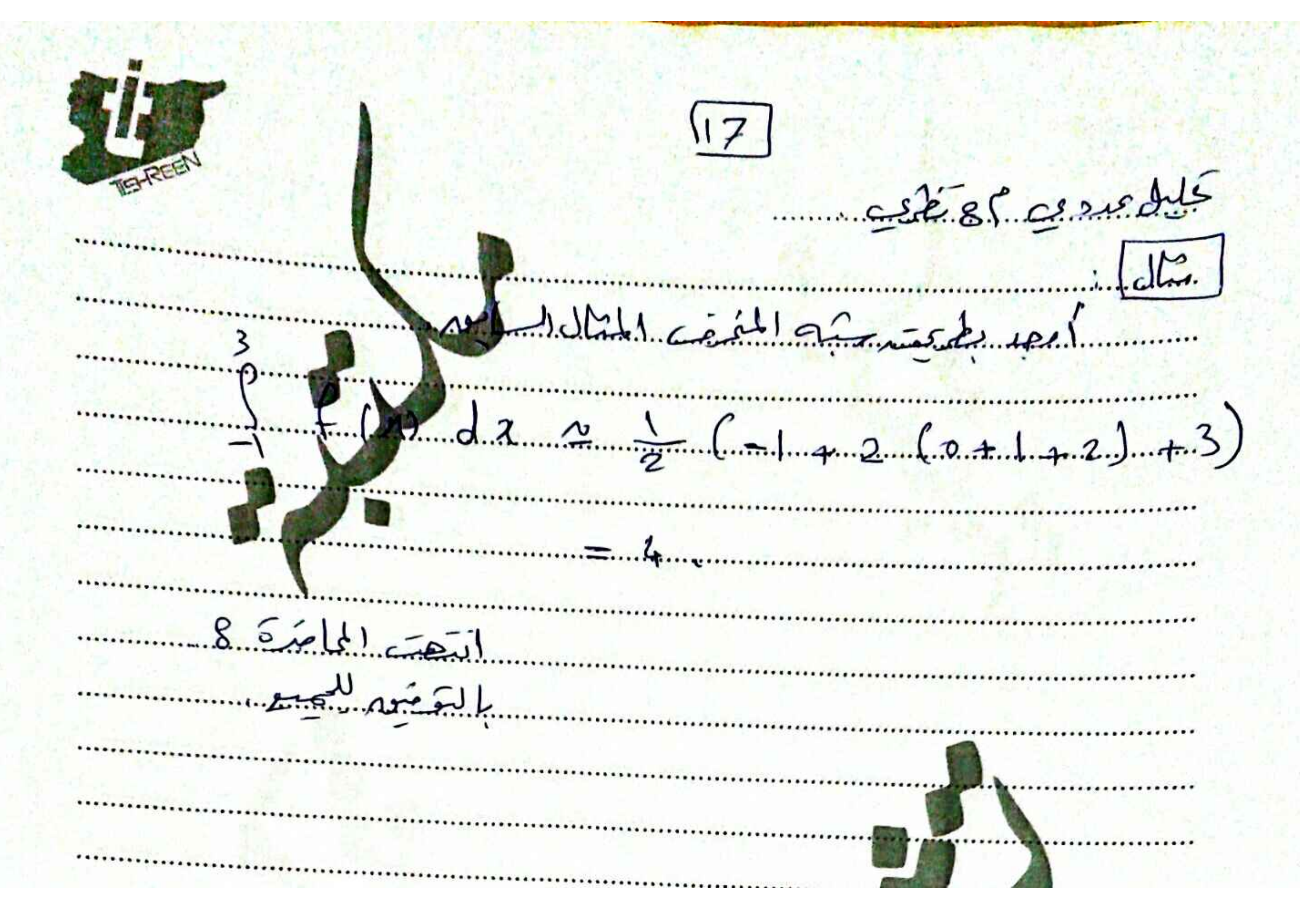
(عدد زوجي)

(مجموع العناصر)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1+f_2+\dots+f_{n-1}) + f_n\right]$$

نفس الطريقة السابقة نحسب الخطأ المرتكب:

$$R = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\alpha)$$





تحليل عددي م8 نظري

**مثال:**

أوجد بطريقة شبه المنحرف المثال السابق

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\left(-1 + 2\,(0+1+2) + 3\right)$$

$$= 4.$$

انتهت المحاضرة 8

بالتوفيق للجميع